#### Лекция № 8

###### 7. Отыскание опорного решения ОЗЛП.

Пусть имеется ОЗЛП с ограничениями – равенствами, записанными в стандартной форме:

y1  *b*1

  *x*

 12 *x*2

 ...   *x* , 

y2  *b*2

11

1

1*n*

*n*

 

21 *x*1

 22 *x*2

 ...   *x* , 

(7.1)

...................... 

2 *n*

*n*





*mn*

*n*

ym  *bm*

 

*m*1 *x*1

 *m* 2 *x*2

 ...   *x*

,

В этом разделе мы предположим, что решение *x*1=0, *x*2=0, …, *xn*=0,

*y*1=*b*1, *y*2=*b*2,…, *ym=bm недопустимо*, т.е. среди *bi ,i*  1*,m*

есть *отрицательные*.

Чтобы найти *первое опорное решение* мы шаг за шагом будем менять местами базисные и свободные переменные в (7.1) до тех пор, пока не придём к опорному решению или не убедимся, что его нет. Последнее бывает, когда система (7.1) несовместима с неравенствами

*x1*  *0, x2*  *0, …, xn*  *0, y1*  *0, y2*  *0,…, ym*  *0 …*

*x*  0*,i*  1*,n; y*

*i*

*j*

 0*, j*  1*,m*

(7.2)

Очевидно, обмен

*xj*  *yi*

надо проводить так, чтобы число

отрицательных свободных членов убывало с каждым шагом, либо если их число остается постоянным, то, по крайней мере, убывали их абсолютные величины.

Имеется ряд способов выбора разрешающего элемента. Остановимся (без доказательства) на одном из них.

Пусть одно из уравнений (7.1) имеет отрицательный свободный член. Ищем в этой строке элемент ij  0 . (Если такого нет, то (7.1) несовместима с

(7.2)). Выбираем столбец, где

ij

стоит, в качестве разрешающего. Теперь в

этом столбце надо найти разрешающий элемент.

Для этого рассмотрим все элементы этого столбца, имеющие одинаковый знак со свободным членом, и из них выбираем в качестве

разрешающего тот элемент, для которого отношение к нему свободного члена *минимально*.

Пример

y1  1   *x*1  2*x*2  *x*3  

y2  5   2*x*1  *x*2  *x*3 







(7.3)

y3  2  *x*1  *x*2  

y4  1   *x*2  *x*3  

Стандартная таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Св.член | х1 | х2 | х3 |
| y1 | 1 | -1 | -2 | 1 |
| y2 | -5 | -2 | 1 | -1 |
| y3 | 2 | **1** | 1 | 0 |
| y4 | 1 | 0 | -1 | 1 |

 5  5 ;

2  2.

значит элемент 

 1 разрешающий элемент.

 2 2 1 31

Проводим операцию

*x*1  *y*3 . Получим новую стандартную таблицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Св.член | у3 | х2 | х3 |
| y1 | 3 | 1 | -1 | 1 |
| y2 | -1 | 2 | 3 | -1 |
| х1 | 2 | **1** | 1 | 0 |
| y4 | 1 | 0 | -1 | 1 |

3  3*;* 1  1*;* 1  1*.*

На основе двух последних отношений возмем, к

1 1 1

примеру, разрешаюшим элемент   1 и проводим операцию *x*  *y*

23

3 2

Новая стандартная таблица после

*x*3  *y*2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Св.член | у3 | х2 | y2 |
| y1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| х3 | 1 | -2 | -3 | -1 |
| х1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| y4 | 0 | 2 | 2 | 1 |

Здес все *bi*  0 , поэтому получено опорное решение:

*y3 = х2= у2=0; y1=2; х3=1; х1=2; y4=0.*

Пример 2.

Найти (если существует) опорное решение системы

*y*  4   *x*  2*x* *,* 

1

*1*

2



*y*  3  *x*  *x*  *x* *,*

2 3 

1



*2*



(7.4)

*y*  10  2*x*  *x*  *x ,*

1

*3*

2 3 

*y*  2   *x*  *x*  

2 

1

*4*

Стандартная таблица.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Св.член | х1 | х2 | х3 |
| y1 | -4 | -1 | 2 | 0 |
| y2 | -3 | 1 | -1 | 1 |
| y3 | -10 | 2 | -1 | 1 |
| y4 | -2 | -1 | 1 | 0 |

1. выбираем строку с *bi*  0 , например строку y1.
2.   0 , поэтому столбец х1- разрешающий.

11

3.  4  4*;*  2  2*.*

1 1

4. проводим операцию

*x*1  *y*4

Новая стандартная таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *bi* | y4 | х2 | х3 |
| y1 | -2 | -1 | 1 | 0 |
| y2 | -5 | 1 | 0 | 1 |
| y3 | -14 | 2 | 1 | 1 |
| х1 | 2 | -1 | -1 | 0 |

Уравнение:

y3  14  2*y*4

* *x*2
* *x*3  не дает

*y3*  0

ни при каких y4, х2, х3. Значит, система

(7.4) несовместима с неравенствами (7.2) и ОЗЛП с ограничениями (7.4) допустимых решений не имеет. Это видно также и по у2.

Значить, нет необходимости специально исследовать систему условий ОЗЛП на совместимость в области неотрицательных решений: этот вопрос выясняется автоматически в процессе поиска опорного решения.

###### 8. Отыскание оптимального решения ОЗЛП.

Теперь задача состоит в том, чтобы найти такое опорное решение при котором

*E*  *c*0  1*x*1   2 *x*2 ...   *k xk*   min .

Принципиальный путь поиска оптимального решения мы рассматривали в разделе **5**. Здесь на примерах покажем, как это делается с помощью

табличного алгоритма

*x j*  *yi .*

Пример 1. Найти оптимальное решение ОЗЛП:

*y*  2  *x*

1

*1*

* *x*2

 2*x*3 

*y*  1 *x y*  5  *x*

1

*2*

*3*



* *x*2
* *x*3

2

 *x*3  







(8.1)

*y*  2  2*x*

1

*4*

* *x*2

 

*E*  *O*  *x*

1

 2*x*2

 *x* *.*

(8.2)

Стандартная таблица для (8.1) и (8.2)

3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Св.член | х1 | х2 | х3 |
| Е | 0 | -1 | 2 | 1 |
| у1 | 2 | 1 | 1 | -2 |
| у2 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| у3 | 5 | 0 | 1 | 1 |
| у4 | 2 | 2 | -1 | 0 |

Опорное решение: х1=0; х2=0; х3=0; у1=2; у2=1; у3=5; у4=2; Е=0. Коэффициенты при х2 и х3 положительны в (8.2). Поэтому при

*x*2 *,x*3  *E*  *.*

Любую из х2 и х3 можно вывести из числа свободных. Пусть

это х3. Значит, столбец х3 – разрешающий. Разрешающий элемент должен быть положительным. Этому условию соответствуют элементы столбца х3, состоящие в строках у2 и у3. Какой из них взять в качестве разрешающего: тот для которого отношение к нему свободного члена минимально (наиболее

«чувствительная» к увеличению х3 базисная переменная – обоснование см. раздел 5).

Таким образом,

1  1*;* 5  5*;* следовательно, разрешающий элемент

1 1

 23  1 и поэтому проводится операция *x*3  *y*2 . Получаем новую таблицу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | х1 | х2 | у2 | Е=-1 |
| Е | -1 | -2 | 3 | -1 |
| у1 | 4 | 3 | -1 | 2 |
| х3 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| у3 | 4 | -1 | 2 | -1 |
| у4 | 2 | 2 | -1 | 0 |

Здесь в первой строке (Е) есть положительный коэффициент при х2, значит х2 нужно вывести из числа свободных. Т.к. в таблице положительный

32

элемент в столбце х2 только

  2*,*

то его и выбираем в качестве

разрешающего и проводим операцию

*x*2  *y*3 . Получим таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | х1 | у3 | у2 | Е=-7 |
| Е | -7 | -1/2 | -3/2 | ½ |
| у1 | 6 | 5/2 | ½ | 3/2 |
| х3 | 3 | ½ | ½ | ½ |
| х2 | 2 | -1/2 | 1/2 | -1/2 |
| у4 | 4 | 3/2 | 1/2 | -1/2 |

Так как, в строке Е и столбце у2 есть положительный элемент, то нужно теперь вывести у2 из числа свободных. Для поиска разрешающего элемента:

6:3/2=4, 3:1/2=6; 4<6. Значит, разрешающим выбираем элемент строки

равный 3/2;

*y*1 ,

Проводим операцию

*у*2  *y*1 *:*

Еопт=-9

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | х1 | у3 | у1 |
| Е | -9 | -4/2 | -5/3 | -1/3 |
| у2 | 4 | 5/3 | 1/3 | 2/3 |
| х3 | 1 | -1/3 | 1/3 | -1/3 |
| х2 | 4 | 1/3 | 2/3 | 1/3 |
| у4 | 6 | 7/3 | 2/3 | 1/3 |

Здесь в строке Е нет положительных элементов. Значит, оптимальное решение получено:

x1  *y*3  *y*1  0; *y*2  4; *x*3 1; *x*2  4; *y*4  6.

*E*min  9  *Eопт* .

Вопрос: А что если в столбце, содержащем положительный элемент строки Е, не найдётся ни одного положительного элемента, чтобы сделать его разрешающим? В этом случае ОЗЛП не имеет оптимального решения (по этой переменной Е не ограничена снизу).

###### Правила нахождения оптимальные решения ОЗЛП:

1. Если все свободные члены (не считая строки Е) в симплекс-таблице неотрицательны, а в строке Е (не считая свободного члена) нет ни одного положительного элемента, то оптимальное решение достигнуто.
2. Если в строке Е есть положительный элемент, а в столбце соответствующем ему, нет ни одного положительного элемента, то Е не ограничена снизу и ОЗЛП не имеет оптимального решения.
3. Если в этом столбце есть положительные элементы, то следует произвести замену одной из свободных переменных на одну из

базисных, причём в качестве разрешающего взять тот элемент этого столбца, для которого отношение к нему соответствующего свободного члена минимально.

###### Замечания:

1. В стандартных симплекс-таблицах могут встречаться случаи, когда один или несколько свободных членов в уравнениях – ограничениях равны нулю. Это значит, что в данном опорном решении обращаются в нуль не только свободные, но и некоторые из базисных переменных. Это так называемый вырожденный случай.
2. В очень редких случаях может оказаться, что последовательное применение правила выбора разрешающего элемента приводит к тому,

что после нескольких замен

*х*j  *yi*

мы вновь возвращаемся к тому же

набору свободных и базисных переменных, с которого начали. Это называется зацикливанием. Практически для избегания этого достаточно бывает при повторении взять разрешающий элемент не так, как он был взят первый раз (например, в другом столбце).

###### Контрольные вопросы

1. В каких случаях возникает необходимость поиска первого решения в симплекс-таблице.
2. Опишите способ выбора разрешающего элемента при поиске первого опорного решения в симплекс-таблице.
3. Расскажите на примере схему поиска оптимального решения задачи ЛП табличным алгоритмом.
4. Что означает термин, «вырожденный» случай ЗЛП и «зацикливание» в стандартной таблице.